

## 6. Transmission des données numériques: Modulation numérique

Des données numériques qui doivent être transmises d'un transmetteur au récepteur doivent être encodées dans un signal qui peut être transmis sur le canal actuel. Le processus qui convertit les données numériques en signal de transmission est appelé la modulation numérique. Chaque type de modulation a ses avantages et ses désavantages. Un signal de transmission doit avoir les propriétés souhaitables suivantes :

- 1) Le signal doit utiliser la moindre largeur de bande possible;
- 2) Une faible probabilité d'erreur de détection (le récepteur détecte un symbole autre que le symbole qui a été transmis);
- 3) La possibilité de détecter ou corriger des erreurs de détection;
- 4) Éviter avoir de composante spectrale à  $f = 0$  (les répéteurs dans un réseau utilisent des transformateurs qui bloquent la composante c.c.);
- 5) Facilite la synchronisation de l'horloge (l'horloge indique le temps où il y a une transition d'un symbole au prochain).

### 6.1 Modulation numérique en bande de base

Dans un réseau où le transmetteur et le récepteur sont connectés par un fil ou une fibre optique et le multiplexage en fréquence n'est pas requis, on peut transmettre les données en les convertissant en signaux en bande de base. Ceci est appelé la codification par lignes (en anglais « *line coding* »). Supposons que nous voulons transmettre  $N$  symboles numériques. Nous transmettons le symbole  $s_n$  sur l'intervalle  $(n-1)T_s < t < nT_s$  où  $n = 1, 2, \dots, N$ . Typiquement, la valeur du symbole est transmise en modulant un paramètre d'une impulsion.

#### 6.1.1 Modulation numérique en bande de base binaire

Pour la modulation binaire, les symboles  $s_n$  ont deux valeurs possibles qui correspondent aux bits 0 et 1. Cependant c'est possible d'utiliser d'autres valeurs pour  $s_n$  comme  $-A$  et  $A$  (où  $-A$  représente le 0 et  $A$  représente le 1). Si le taux de bits est  $R_b$  bits par seconde, la durée d'un bit est  $T_b = 1/R_b$  seconde/bit. Le premier bit est transmis sur l'intervalle de temps  $0 < t < T_b$ , le deuxième sur l'intervalle  $T_b < t < 2T_b$  et le  $n$ ième bit sur l'intervalle  $(n-1)T_b < t < nT_b$ .

##### 6.1.1.1 Modulation par impulsions en amplitude binaire

Pour la modulation par impulsions en amplitude (en anglais « *pulse amplitude modulation* » - PAM), l'amplitude de l'impulsion est proportionnelle à la valeur du symbole. Donc

$$s_{PAM}(t) = \sum_{n=1}^N A_2 s_n p(t - nT_s) \quad (6.1)$$

où  $p(t)$  est l'impulsion,  $A_2$  est l'amplitude du signal binaire et  $s_n$  est la valeur du symbole binaire. À la Figure 6.1 il y a des exemples d'un signal PAM où on veut transmettre les données 11100101. Dans ces exemples, on utilise une impulsion rectangulaire avec amplitude  $A_2$  pour  $0 < t < T_p$ . Dans certains exemples,  $T_p < T_b$  et en autres  $T_p = T_b$ . Il y a une discussion sur chaque signal PAM plus bas.

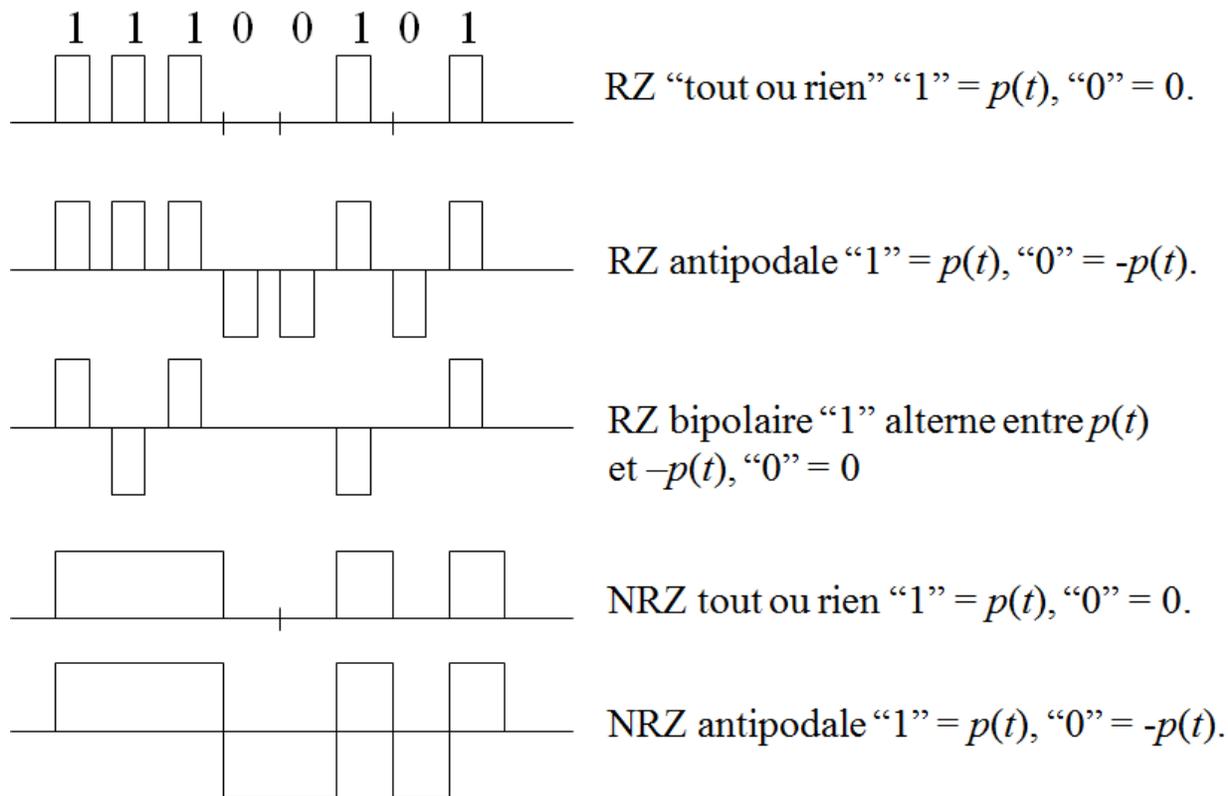


Figure 6.1 : La modulation PAM binaire.

Pour les cas où  $T_p < T_b$ , le signal retourne à une valeur de 0 volts avant la fin de l'intervalle de bit, donc on dit que c'est la modulation par impulsions en amplitude retour à zéro (RZ). Quand  $T_p = T_b$ , le signal ne retourne pas à 0 volts durant l'intervalle de bit (sauf si on ne transmet aucune impulsion). Donc on dit que c'est du PAM non-retour à zéro (NRZ). Pour la modulation antipodale,  $s_n = 1$  quand le bit est 1 et  $-1$  quand le bit est 0 (Donc  $s_n = 2(b_n - 1)$  où  $b_n$  est le bit de l'intervalle  $(n-1)T_b < t < nT_b$ ). Pour la modulation tout-ou-rien,  $s_n = 1$  quand le bit est 1 et 0 quand le bit est 0. Pour la modulation bipolaire,  $s_n$  alterne entre 1 et  $-1$  quand le bit est 1 et 0 quand le bit est 0.

### 6.1.1.2 Modulation par impulsions en position binaire

Pour la modulation par impulsions en durée (en anglais « pulse position modulation » - PPM), on utilise une impulsion  $p_1(t)$  pour représenter le bit 1 et  $p_0(t)$  pour représenter le bit 0. Le  $p_1(t)$  est non-zéro sur l'intervalle  $0 < t < T_b/2$  et le  $p_0(t)$  est non-zéro sur l'intervalle  $T_b/2 < t < T_b$ . Ce n'est pas nécessaire que les impulsions  $p_1(t)$  et  $p_0(t)$  aient une forme rectangulaire ou qu'elles aient des formes similaires. Cependant à la Figure 6.2 (a) on démontre les impulsions  $p_1(t)$  et  $p_0(t)$  en supposant qu'elles aient une forme rectangulaire et la Figure 6.2 (b) démontre le signal  $s_{PPM}(t)$  pour transmettre les données 11100101. Le signal PPM est donné par :

$$s_{PPM}(t) = \sum_{n=1}^N p_{b_n}(t - nT_b) \quad (6.2)$$

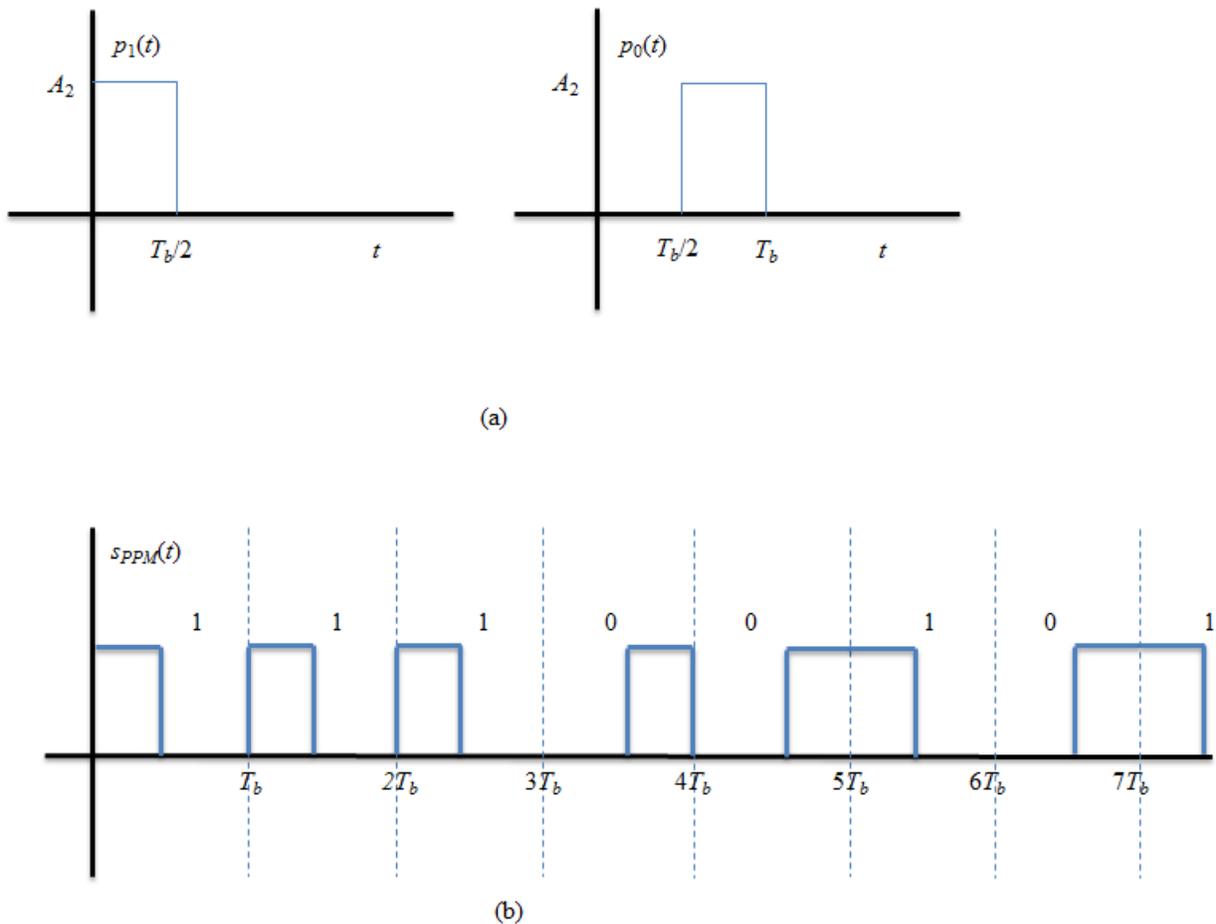


Figure 6.2 (a) les impulsions utilisées dans la PPM (b) exemple d'un signal PPM.

### 6.1.1.3 Encodage Manchester

L'encodage Manchester est un signal antipodal où  $p_1(t)$  et  $p_0(t)$  sont démontrés à la Figure 6.3 (a). On remarque que  $p_0(t) = -p_1(t)$ . Le but de l'utilisation de ces impulsions est d'éviter des composantes c.c locales qui pourraient arriver dans la PAM si on transmet plusieurs 0 ou plusieurs 1 de suite. La valeur moyenne de chaque impulsion est 0. À la Figure 6.3(b) un signal avec encodage Manchester est démontré pour transmettre les données 11100101. De la figure 6.3, un signal avec l'encodage Manchester est semblable à un signal PPM décalé en amplitude. Donc  $s_{EM}(t) = 2(s_{PPM}(t) - A_2/2)$ .

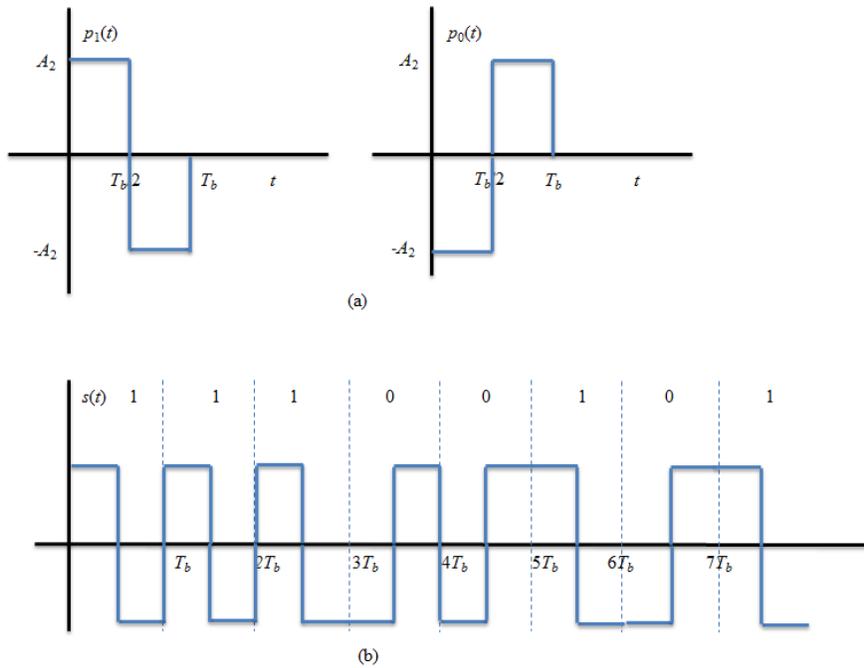


Figure 6.3 : (a) Impulsions pour l'encodage Manchester (b) Signal avec encodage Manchester.

### 6.1.2 Modulation numérique en bande de base non-binaire

Quand on groupe  $k$  bits ensemble on crée un symbole  $M$ -aire où  $M = 2^k$ . Le taux de symboles  $R_s$  est donné par :

$$R_s = \frac{R_b \text{ bits/sec}}{k \text{ bits/symbole}} = \frac{R_b}{k} \text{ symboles/sec} \quad (6.3)$$

Et l'intervalle de symbole,  $T_s$ , est donné par :

$$T_s = \frac{1}{R_s} = kT_b \quad (6.4)$$

Donc le taux de symboles est réduit et l'intervalle de symbole est plus long en augmentant  $k$ .

#### 6.1.2.1 Modulation par impulsions en amplitude M-aire (MPAM)

En groupant  $k$  bits pour former un symbole, il y a  $M = 2^k$  symboles distinctes. Si on la PAM antipodale,  $s_n \in \{-(M-1)A_M, -(M-3)A_M, \dots, -A_M, A_M, 3A_M, \dots, (M-1)A_M\}$ . La différence entre deux amplitudes adjacentes est  $2A_M$  (comme en binaire  $\{A_2, -A_2\}$ ). On démontre la PAM binaire, 4-aire et 8-aire pour la transmission des données 110101001000 à la Figure 6.4.

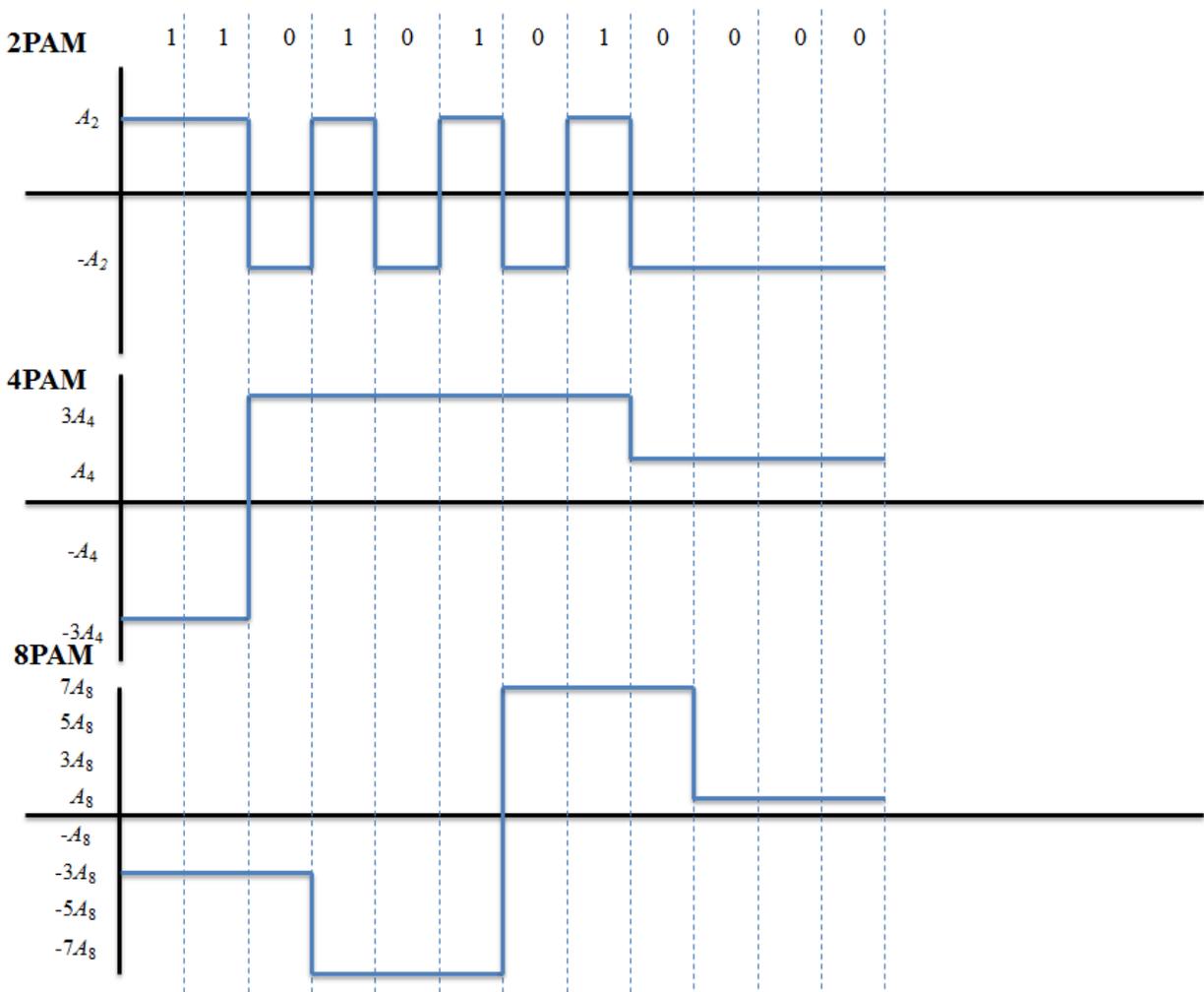


Figure 6.4 PAM binaire, 4-aire et 8-aire

La correspondance entre les symboles et les amplitudes est donnée par le tableau 6.1.

**Tableau 6.1 : Correspondance entre les symboles et les amplitudes en MPAM**

2PAM		4PAM		8PAM	
0	$-A_2$	01	$3A_4$	010	$7A_8$
1	$A_2$	00	$A_4$	011	$5A_8$
		10	$-A_4$	001	$3A_8$
		11	$-3A_4$	000	$A_8$
				100	$-A_8$
				110	$-3A_8$
				111	$-5A_8$
				101	$-7A_8$

La correspondance entre les symboles et les amplitudes vise à réduire le taux d'erreur de bits au récepteur. Quand il y a une erreur de détection au récepteur, le récepteur choisit en erreur le symbole qui correspond à une amplitude adjacente avec une plus haute probabilité que choisir un symbole correspondant à une amplitude non-adjacente. Donc pour réduire le taux d'erreur dans les bits, pour  $M > 2$ , on utilise le codage Gray pour nous assurer que les amplitudes adjacentes correspondent aux symboles qui diffèrent dans un bit seulement.

L'énergie moyenne de symbole est donné par :

$$E_s = \sum_{n=1}^M p(s_n) \int_0^{T_s} p_{s_n}^2(t) dt \quad (6.5)$$

où  $p(s_n)$  est la probabilité que le symbole  $s_n$  est transmis et  $p_{s_n}(t)$  est l'impulsion qu'on transmet quand le symbole dont on veut transmettre est  $s_n$ . En supposant que les symboles sont équiprobable, (6.5) devient :

$$E_s = \sum_{n=1}^M \frac{\int_0^{T_s} p_{s_n}^2(t) dt}{M} \quad (6.6)$$

Dans la figure 6.4, on utilise des impulsions NRZ rectangulaire. Pour ce cas, l'énergie par symbole moyenne pour la 2PAM (trouvé en utilisant (6.6)) est donné par :

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} A_2^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_s} (-A_2)^2 dt = A_2^2 T_s \quad (6.7)$$

Pour le PAM binaire,  $T_s = T_b$  et le symbole est un bit donc l'énergie de symbole est égal à l'énergie par bit ( $E_b$ ) donc on écrit (6.7) comme

$$E_b = A_2^2 T_b \quad (6.8)$$

Pour la 4PAM

$$E_s = \frac{1}{4} \int_0^{T_s} A_4^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^{T_s} (-A_4)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^{T_s} (3A_4)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^{T_s} (-3A_4)^2 dt = 5A_4^2 T_s \quad (6.9)$$

Pour le 4PAM, il y a deux bits par symbole, donc l'énergie par symbole est l'énergie par 2 bits. Donc l'énergie par bit pour le 4PAM est

$$E_b = \frac{5A_4^2 T_s}{2} = 5A_4^2 T_b \quad (6.10)$$

Pour la 8PAM, on peut démontrer que

$$E_s = 21A_8^2 T_s \quad (6.11)$$

et

$$E_b = \frac{21A_8^2 T_s}{3} = 21A_8^2 T_b \quad (6.12)$$

En générale pour la MPAM, l'énergie moyenne par bit,  $E_b$  est donné par :

$$E_b = \frac{E_s}{k} \quad (6.13)$$

où  $k = \log_2 M$ .

Quand on compare la performance des modulations différentes, il faut normalement faire la comparaison pour des signaux qui ont la même puissance et le même taux de bits. La puissance moyenne un symbole est

$$P = \frac{E_s}{T_s} = \frac{E_s}{kT_b} = \frac{E_b}{T_b} \quad (6.14)$$

Pour des signaux avec le même taux de bits,  $T_b$  est une constante, donc pour que les signaux aient la même puissance, il faut que  $E_b$  soit une constante pour les différentes modulations. Donc pour que les signaux 2PAM, 4PAM et 8PAM aient la même puissance quand ils ont le même taux de bits, il faut que les expressions (6.8), (6.10) et (6.12) soient égales. Donc pour les signaux de la Figure 6.4 :

$$A_2^2 = 5A_4^2 = 21A_8^2 \quad (6.15)$$

Donc

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} A_2 \quad (6.16)$$

Et

$$A_8 = \frac{1}{\sqrt{21}} A_2 \quad (6.17)$$

Quand on augmente  $M$ , on voit que la séparation entre les amplitudes adjacentes diminue. Les étudiants apprendront plus tard que cette séparation détermine le taux d'erreur de détection. Donc, en augmentant  $M$ , la probabilité d'erreur de bit au récepteur augmente.

### 6.1.2.2 La modulation par impulsions en position $M$ -aire (MPPM)

Les signaux 2PPM, 4PPM et 8PPM sont démontrés à la Figure 6.5 pour les données 110010. La durée de symbole  $T_s = kT_b$  et a durée du symbole est divisée en  $M$  tranches de temps sans chevauchement ici, la correspondance de symbole à impulsions n'a pas de conséquence. La correspondance utilisée dans la Figure 6.5 est donnée dans le tableau 6.2.

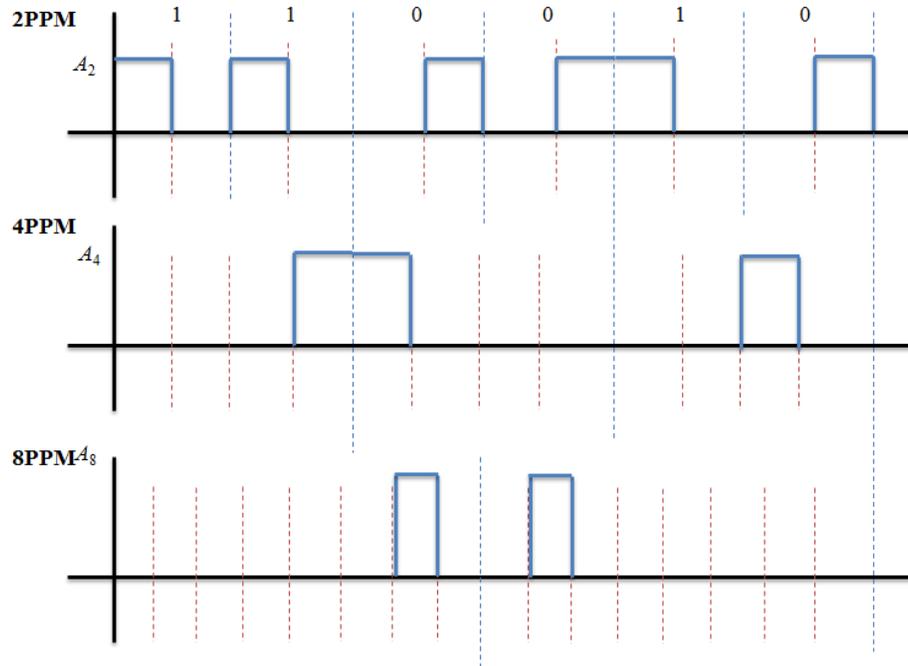


Figure 6.5 : La MPPM pour  $M = 2, 4$  et  $8$ .

**Tableau 6.2 : Correspondances entre symboles et impulsions dans la Figure 6.5**

	$p(t)$		
2PPM		0	$p(t-T/2)$
		1	$p(t)$
4PPM		00	$p(t)$
		01	$p(t-T/4)$
		10	$p(t-T/2)$
		11	$p(t-3T/4)$
8PPM		000	$p(t)$
		001	$p(t-T/8)$
		010	$p(t-T/4)$
		011	$p(t-3T/8)$
		100	$p(t-T/2)$
		101	$p(t-5T/8)$
		110	$p(t-3T/4)$
		111	$p(t-7T/8)$

De la Figure 6.5, on peut constater que chaque symbole dans un signal MPPM a la même énergie (même amplitude et même durée). Donc l'énergie par symbole pour les modulations 2PPM, 4PPM et 8PPM de la Figure 6.5 est :

$$E_s = \begin{cases} \frac{A_2^2 T_b}{2} & \text{pour 2PPM} \\ \frac{A_4^2 T_s}{4} & \text{pour 4PPM} \\ \frac{A_8^2 T_s}{8} & \text{pour 8PPM} \end{cases} \quad (6.18)$$

Mais  $T_s = kT_b$  et  $E_b = E_s/k$ , donc, l'énergie moyenne par bit est :

$$E_b = \begin{cases} \frac{A_2^2 T_b}{2} & \text{pour 2PPM} \\ \frac{A_4^2 T_b}{4} & \text{pour 4PPM} \\ \frac{A_8^2 T_b}{8} & \text{pour 8PPM} \end{cases} \quad (6.19)$$

Pour que les trois signaux aient la même puissance pour le même taux de bits, les expressions pour  $E_b$  en (6.19) doivent être égales. Donc pour avoir des signaux avec la même puissance pour le même taux de bit

$$A_4 = \sqrt{2}A_2 \quad (6.20)$$

et

$$A_8 = 2A_2 \quad (6.21)$$

## 6.2 L'interférence inter-symbole

L'interférence inter-symbole (en anglais « Intersymbol Interference » - ISI) arrive quand on détecte le symbole du signal reçu mais le symbole détecté est une fonction du symbole désiré ainsi que d'autres symboles encodés dans le signal. L'ISI peut être causée par une erreur de synchronisation d'horloge mais ici nous sommes intéressés aux cas où il n'y a pas d'erreur de synchronisation. Quand on utilise des impulsions qui ont durée  $T_s$  ou moins, il ne devrait pas avoir de l'ISI, mais une impulsion qui a une durée finie a une largeur de bande qui tend vers l'infini. Une impulsion avec une largeur de bande finie peut être utilisée sans causer de l'ISI. On dit que ce type d'impulsion satisfait le premier critère de Nyquist (aussi nommé le critère de Nyquist pour éviter le ISI).

### 6.2.1 Premier Critère de Nyquist

Considérons le signal MPAM

$$s_{MPAM}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n p(t - mT_s) \quad (6.22)$$

Si on échantillonne ce signal à  $t = nT_s$ , la sortie sera :

$$s_{MPAM}(nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p((m-n)T_s) = A_n p(0) + \sum_{i=-\infty, i \neq 0}^{\infty} A_n p(iT_s) \quad (6.23)$$

où  $A_n p(0)$  représente l'amplitude du symbole désiré et  $\sum_{i=-\infty, i \neq 0}^{\infty} A_n p(iT_s)$  représente l'ISI. Alors pour ne pas avoir de l'ISI, l'impulsion devra satisfaire les conditions suivantes :

$$p(nT_s) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \end{cases} \quad (6.24)$$

### 6.2.2 Largeur de bande pour un signal MPAM sans ISI

Supposons que nous avons un signal MPAM où il n'y a pas d'ISI. Donc l'impulsion satisfait les conditions de (6.24). Alors

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \delta(t) \quad (6.25)$$

En prenant la transformée de Fourier de chaque côté, on obtient :

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = 1 \quad (6.26)$$

Autrement dit

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = T_s} \quad (6.27)$$

Alors si une impulsion satisfait la condition (6.27), il n'y aura pas d'ISI. Il faut mentionner que (6.28) n'est pas une condition différente que (6.24). Elle est une conséquence de (6.24). Alors si une impulsion satisfait une des conditions (6.24) ou (6.27), elle satisfait les deux.

L'impulsion avec la plus petite largeur de bande qui ne produit pas d'ISI est l'impulsion  $p_{min}(t)$  qui est donnée par :

$$\boxed{p_{min}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)} \quad (6.28)$$

Pour cette impulsion

$$P_{min}(f) = T_s \Pi(fT_s) \quad (6.29)$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{min}\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$  est démontré à la Figure 6.6.

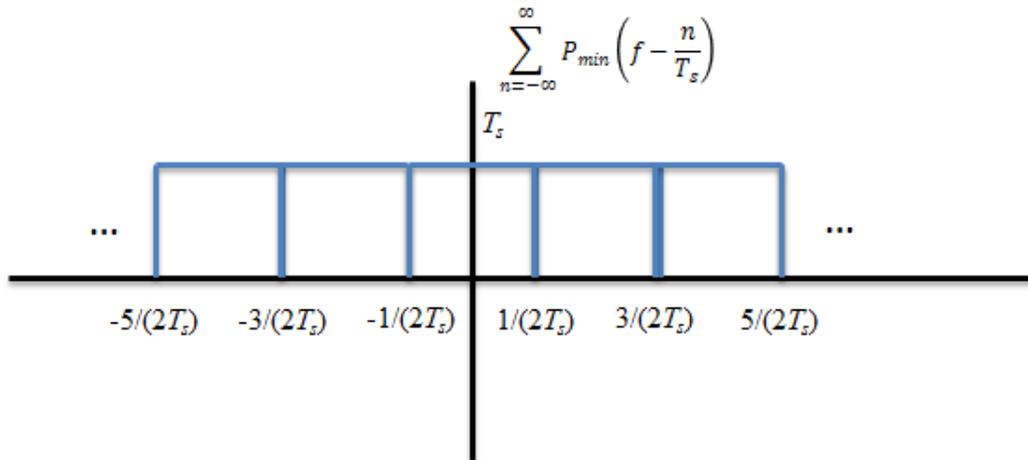


Figure 6.6 :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{min}\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$ .

Ce n'est pas possible d'avoir une impulsion avec une largeur de bande inférieure à  $p_{min}(t)$  car il y aura des nules en  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{min}\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$  si la largeur de bande est inférieure à  $1/(2T_s)$ . Donc la largeur de bande minimum du signal MPAM est

$$B_{MPAM_{min}} = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2} \quad (6.30)$$

L'impulsion  $p_{min}(t) = \text{sinc}(t/T_s)$  satisfait la condition (6.24) donc  $p_2(t) = \text{sinc}^2(t/T_s)$  doit la satisfaire aussi. Sa transformée de Fourier est donnée par  $P_2(f) = T_s \Lambda(fT_s)$ . La Figure 6.7 démontre  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_2\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$ .

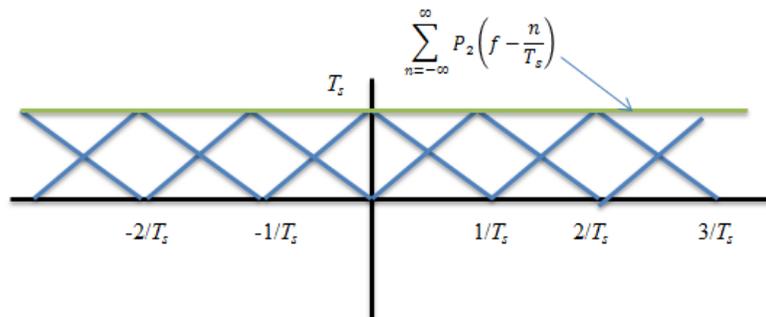


Figure 6.7 :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_2\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$  en vert et  $P_2\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$  en bleu.

On remarque de la Figure 6.7 que la largeur de bande de  $p_2(t)$  est  $1/T_s$  qui est le double de la largeur de bande de l'impulsion  $p_{min}(t)$ .

Il y a aussi les impulsions à cosinus carré (en anglais « *raised cosine* »). La forme de l'impulsion,  $p_{RC}(t)$  est donnée par :

$$p_{RC}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \frac{\cos(\pi\alpha t/T_s)}{1-4\alpha^2 t^2/T_s^2} \quad (6.31)$$

où  $0 < \alpha < 1$  est nommé le facteur de décroissance (en anglais « *roll-off factor* »). Sa transformée de Fourier,  $P_{RC}(f)$  est donnée par :

$$P_{RC}(f) = \begin{cases} T_s & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi T_s}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s}\right)\right) \right] & \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.32)$$

La transformée de Fourier de  $p_{RC}(t)$  est démontrée à la Figure 6.8.

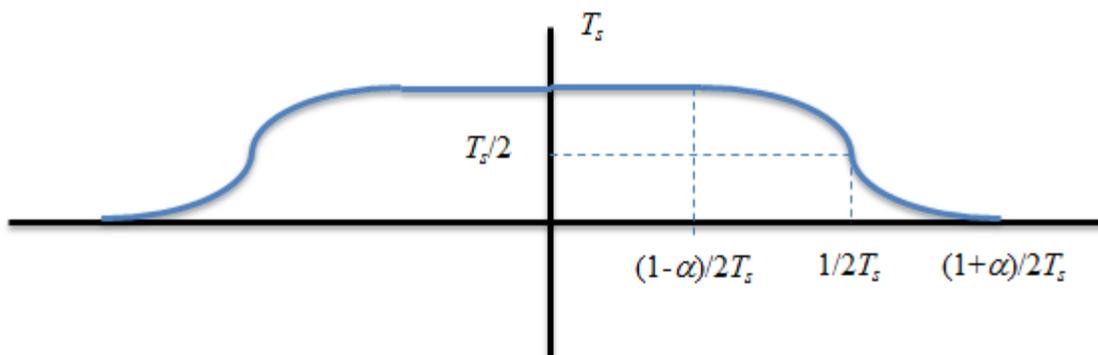


Figure 6.8 : Transformée de Fourier de l'impulsion à cosinus carré.

Cette impulsion a une largeur de bande BRC qui est donnée par :

$$B_{RC} = \frac{1+\alpha}{2T_s} = (1 + \alpha) \frac{R_s}{2} \quad (6.33)$$

Donc sa largeur de bande se trouve entre la largeur de bande minimum et la largeur de bande de l'impulsion  $\text{sinc}^2(t/T_s)$ . Sa largeur de bande est  $(1+\alpha)$  fois plus large que la largeur de bande minimum alors parfois on exprime  $\alpha$  comme un pourcentage. La largeur de bande en excès d'un signal MPAM est  $\alpha \times 100$  exprimée comme un pourcentage (c'est-à-dire que si un signal MPAM a une largeur de bande de 30% en excès, le facteur de décroissance de son impulsion est  $\alpha = 0.3$ .)

À la Figure 6.9 on démontre un signal 4PAM avec un taux de symboles  $R_s = 100$  symboles/sec (donc  $T_s = 0.01$ ). Les données à transmettre sont 11000110 et donc le signal 4PAM est

$$s_{4PAM}(t) = -3p(t) + p(t - T_s) + 3p(t - 2T_s) - p(t - 3T_s) \quad (6.34)$$

À la figure 6.9(a),  $p(t) = \text{sinc}(t/T_s)$  et dans la Figure 6.9(b)  $p(t) = \text{sinc}^2(t/T_s)$ . Les figures 6.9(c) et (d) on emploie des impulsions à cosinus carré où  $\alpha = 0.3$  en (c) et 0.6 en (d).

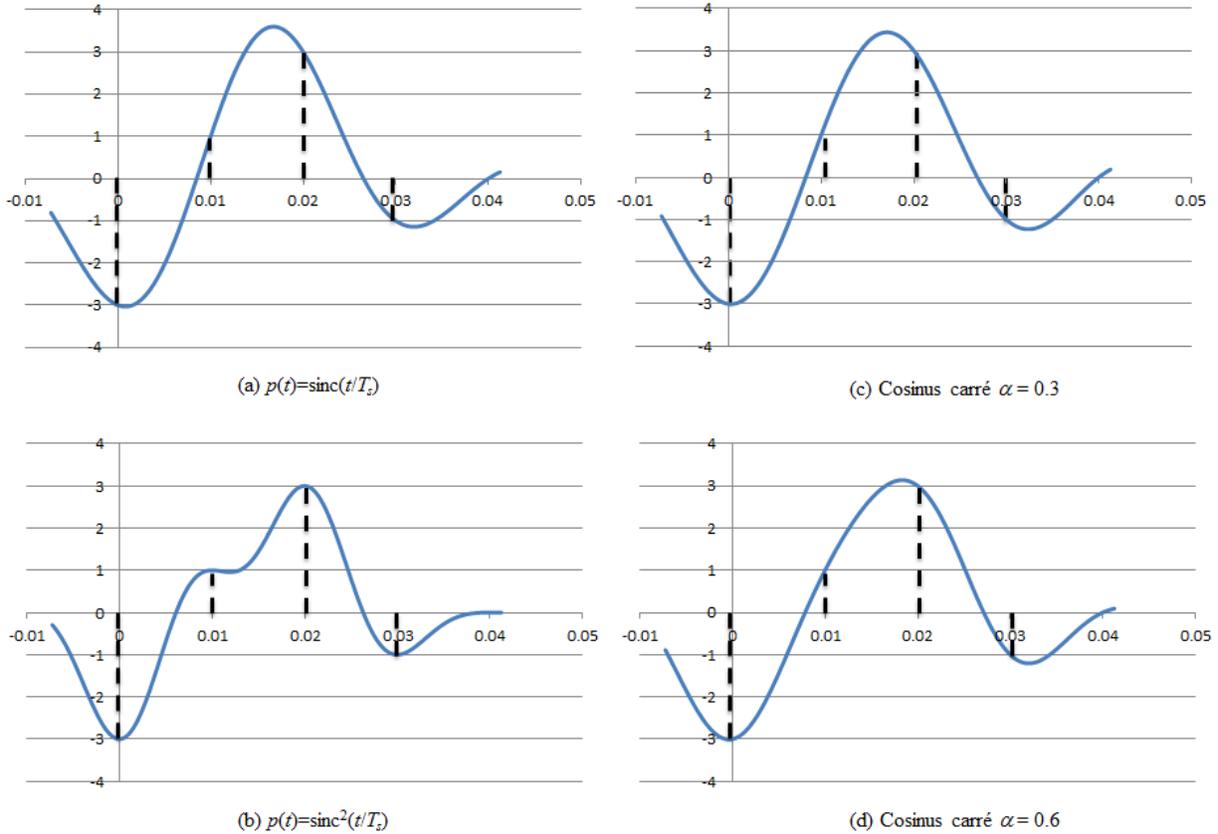


Figure 6.9 : Le signal 4PAM de l'équation (6.35) avec (a)  $p(t) = \text{sinc}(t/T_s)$ , (b)  $p(t) = \text{sinc}^2(t/T_s)$ , (c) impulsion cosinus carrée avec  $\alpha = 0.3$  et (d)  $\alpha=0.6$ .

On voit de la figure 6.9 qu'à l'instant d'échantillonnage, on peut obtenir la valeur du symbole (11 = -3, 00 = 1 etc). Aussi on remarque qu'avec les impulsions sinc et cosinus carré, parfois les valeurs de symboles se trouvent dans une pente du signal ce qui veut dire que si nous avons des erreurs d'horloge (si nous n'échantillons pas au bon temps), une petite erreur d'horloge peut affecter la détection du symbole. Cependant, avec l'impulsion  $\text{sinc}^2$ , la valeur du symbole se trouve près des maximums ou minimums locales et une petite erreur d'horloge n'affecte pas trop la détection du symbole. Donc, en augmentant la largeur de bande du signal, on simplifie la synchronisation de l'horloge au récepteur.

Dernièrement, on remarque que la largeur de bande d'un signal MPAM est **une fonction de son taux de symboles,  $R_s$** . Pour une source avec un taux de bits  $R_b$  qui est fixe, **on peut réduire la largeur de bande du signal PAM en augmentant  $k$  (ou  $M$  car  $M = 2^k$ )**. Souvent la largeur de bande du signal PAM est la contrainte qui détermine la valeur de  $M$  qu'on doit utiliser.

### 6.3 Modulation numérique en bande passante

Un signal numérique en bande passante est un signal où on module un paramètre de la porteuse en fonction du symbole numérique qu'on transmet sur chaque intervalle de signalisation. Typiquement, la fréquence porteuse est très grande comparativement au taux de symboles sortant de la source numérique. Il y a trois types fondamentaux de signaux numériques en bande passante : Modulation par déplacement de phase (en anglais « phase shift keying » - PSK), modulation par déplacement de fréquence (en anglais « frequency shift keying » - FSK) et modulation par déplacement d'amplitude (en anglais « amplitude shift keying » - ASK).

#### 6.3.1 Modulation par déplacement de phase binaire

Pour la modulation numérique en bande passante, on considère l'onde porteuse comme l'impulsion. Alors pour la modulation PSK binaire il y a une « impulsion » quand on doit transmettre le « 1 »,  $s_1(t)$ , et une autre pour transmettre le « 0 »,  $s_0(t)$ . Les signaux  $s_0(t)$  et  $s_1(t)$  sont donnés par :

$$s_1(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.35)$$

et

$$s_0(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_c t + \pi) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.36)$$

On peut réécrire  $s_0(t)$  comme :

$$s_0(t) = \begin{cases} -A \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.37)$$

Un signal PSK binaire prend la forme :

$$s_{PSK}(t) = \sum_{n=1}^N s_{b_n}(t - nT_b) \quad (6.38)$$

où  $b_n \in \{0,1\}$  est la valeur du bit qui doit être transmis sur l'intervalle  $(n-1)T_b \leq t \leq nT_b$ . La Figure 6.10 démontre un signal PSK binaire pour les données 11010. Le taux de bits est 50 bps et la fréquence porteuse est 200Hz.

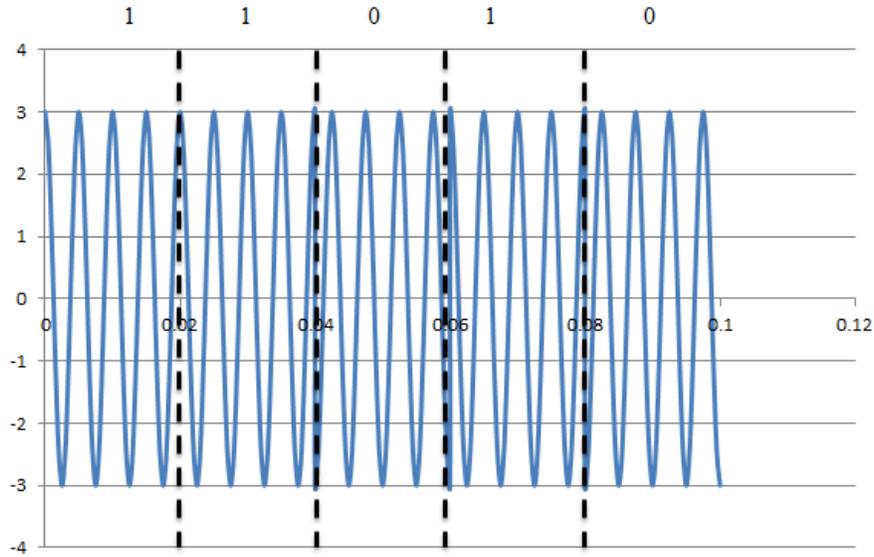


Figure 6.10 : Signal PSK Binaire

### 6.3.2 Modulation par Déplacement de phase M-aire

En groupant  $k$  bits afin de former des symboles, il y a  $M = 2^k$  symboles possibles. Le signal  $s_{si}(t)$  est donné par :

$$s_{si}(t) = \begin{cases} A \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi i}{M}\right) & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.39)$$

où  $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . La correspondance entre les symboles et les signaux est importante car il faut assigner les signaux avec phase adjacente aux symboles qui sont différentes en une position. Alors le codage Gray est utilisé pour faire la correspondance entre symboles et les signaux. Cette correspondance sera investiguée en plus de détails dans le cours ELG4576.

### 6.3.3 Modulation par Déplacement de Fréquence

Pour la FSK, chaque symbole correspond à un signal avec une fréquence différente. La fréquence entre la fréquence minimum et la fréquence maximum est la fréquence porteuse. La séparation entre les fréquences adjacentes est  $\Delta f$ . Le signal correspondant au symbole  $i$  où  $i = 0, 1, \dots, M-1$  est

$$s_i(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_i t) & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.40)$$

où  $f_i = f_c + \left(i - \frac{M-1}{2}\right) \Delta f$ .  $\Delta f$  est choisi afin de minimiser la largeur de bande mais pour aussi minimiser le taux d'erreur de détection. Ce sujet sera abordé dans le cours ELG4576. Dans le cas binaire

$$s_1(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi(f_c + \Delta f/2)t) & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.41)$$

et

$$s_0(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi(f_c - \Delta f/2)t) & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.42)$$

La Figure 6.11 démontre un signal FSK binaire avec taux de bit  $R_b = 50$  bps, fréquence porteuse 400 Hz et  $\Delta f = 100$  Hz (alors  $f_0 = 350$ Hz et  $f_1 = 450$ Hz).

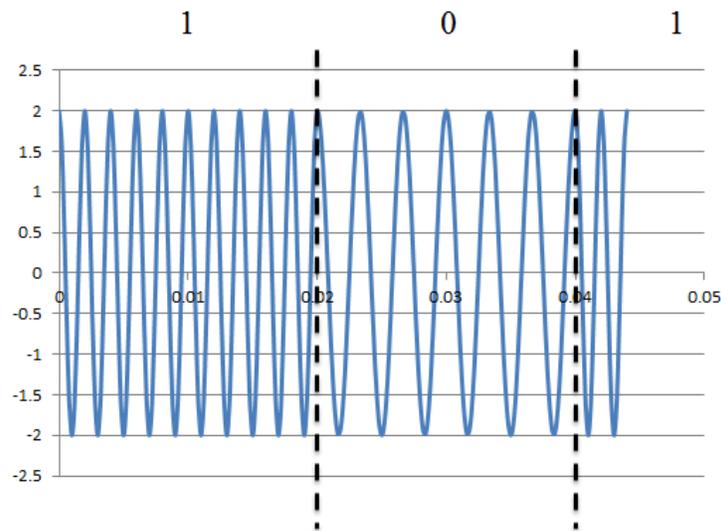


Figure 6.11 : Un signal FSK binaire.

### 6.3.4 Modulation par déplacement d'amplitude (ASK)

Pour la modulation par déplacement d'amplitude, le signal correspondant au symbole  $i$  où  $i = 0, 1, \dots, M-1$  est

$$s_i(t) = \begin{cases} A_i \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.43)$$

où  $A_i = i \times A$ . La figure 6.12 démontre un signal ASK 4-aire avec correspondance  $00 \rightarrow A_0 = 0$ ,  $01 \rightarrow A_1 = A$ ,  $11 \rightarrow A_2 = 2A$  et  $10 \rightarrow A_3 = 3A$  où  $A=1V$ . Le taux de bits est 100 bps (donc  $R_s = 50$  symboles/sec) et la fréquence porteuse est 300Hz.

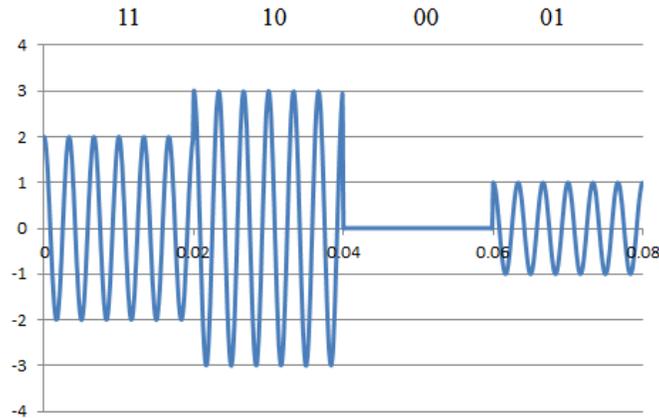


Figure 6.12: Un signal ASK 4-aire.

## 6.4 Sommaire

Dans ce chapitre les étudiants ont appris les notions fondamentales de la modulation numérique en bande de base et une discussion sur les modulations numérique en bande passante. On a vu les relations entre le taux de symboles et la largeur de bande. L'étudiant(e) devrait être capable de trouver le taux de symboles pour une modulation  $M$ -aire à partir du taux de bits. Et l'étudiant devrait être en mesure de déterminer la largeur de bande d'un signal numérique en sachant la forme de l'impulsion et le taux de symboles. Le devoir pour pratiquer va démontrer comment vous pouvez appliquer ces notions.