2.7 Transformée de Fourier

Considérons la série de Fourier, où nous remplaçons X_n par son expression sur la période $-T/2 < t < T/2$.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{\frac{-j2\pi nt}{T}} dt \right) e^{\frac{j2\pi nt}{T}} \qquad (2.65)$$

Maintenant, considérons un signal arbitraire $x(t)$ qui est apériodique. Un signal apériodique peut être considéré comme un signal périodique dont la période est infinie. Alors, on peut réécrire (2.65) comme :

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{\frac{-j2\pi nt}{T}} dt \right) e^{\frac{j2\pi nt}{T}} \qquad (2.66)$$

Dans la limite où T tend vers l'infini, $1/T$ devient df qui est une tranche de fréquence infiniment mince et n/T est la $n$ieme tranche de fréquence alors que $(n+1)/T$ est la $(n+1)$ième tranche de fréquence (qui ne chevauche pas ses voisins). Donc si n va de $-\infty$ à ∞, alors n/T représente toutes les tranches de fréquence infinitésimales mais non superposées entre $-\infty$ et ∞ et peut donc être représenté par la variable f dont les unités sont en Hz. La sommation sur l'ensemble de n devient alors une intégrale sur f. Par conséquent, (2.66) devient :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \, e^{j2\pi ft} df \qquad (2.67)$$

Nous réécrivons (2.67) comme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} dt \qquad (2.68)$$

où

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad (2.69)$$

L'équation (2.69) est appelée la transformée de Fourier de $x(t)$ et (2.68) est appelée la transformée de Fourier inverse de $X(f)$.

Exemple 2.9

Trouvez les transformées de Fourier des signaux $x(t) = \delta(t)$ et $y(t) = \Pi(t)$ en utilisant (2.69).

Solution

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \qquad * \\
&= 1
\end{aligned}
$$

où la deuxième ligne indiquée par * est le résultat de (2.2).

$$
\begin{aligned}
Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f t} dt \\
&= -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\Big|_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{j2\pi f} \\
&= \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)
\end{aligned}
$$

Exercice 2.15

Trouvez la transformée de Fourier du signal $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

2.7.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Le tableau 2.1 énumère les propriétés de la transformée de Fourier auxquelles les étudiants ont été introduits dans leur cours de signaux et systèmes.

Tableau 2.1: Propriétés de la transformée de Fourier

Propriété	$x(t)$	$X(f)$
1 Linéarité	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(f)+bX_2(f)$
2 Décalage temporel	$x(t-\tau)$	$X(f)e^{-j2\pi f\tau}$
3 Rééchellement temporel	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$
4 Décalage fréquentiel	$x(t)e^{j2\pi f_o t}$	$X(f-f_o)$
5 Convolution temporelle	$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$
6 Multiplication en temps	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
7 Dérivation temporelle	$dx(t)/dt$	$j2\pi fX(f)$
8 Intégration temporelle	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f)+\frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
9 Dualité	$X(t)$	$x(-f)$
10 Conjugué complexe	$x^*(t)$	$X^*(-f)$

Exemple 2.10

Démontrez les propriétés 1, 2, 3 et 5

Solution

1) $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$

$$X_3(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a x_1(t) + b x_2(t)\right) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(a x_1(t) e^{-j2\pi ft} + b x_2(t) e^{-j2\pi ft}\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} b x_2(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi ft} d$$

$$= a X_1(f) + b X_2(f)$$

2) $x_1(t) = x(t-\tau)$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt$$

$u = t - \tau$

$du = dt$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi f(u+\tau)} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi fu} e^{-j2\pi f\tau} du$$

$$= e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi fu} du$$

$$= e^{-j2\pi f\tau} X(f)$$

3) $a > 0 \rightarrow a = |a|$

$x_1(t) = x(|a| t)$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(|a| t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$u = |a| t$

$du = |a| dt$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi f \frac{t}{|a|}} \frac{du}{|a|}$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi \frac{f}{|a|} u} du$$

$$= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{|a|}\right), \quad a > 0$$

$a < 0 \rightarrow a = -|a|$

$x_1(t) = x(-|a|t)$

$X_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-|a|t) e^{-j2\pi f t} dt$

$u = -|a|t \rightarrow t = \infty \rightarrow u = -\infty$

$du = -|a| dt \quad t = -\infty \rightarrow u = \infty$

$X_1(f) = \int_{\infty}^{-\infty} x(u) e^{-j2\pi f \frac{u}{-|a|}} \frac{du}{-|a|}$

$= -\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi \frac{f}{-|a|} u} \frac{du}{-|a|}$

$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi (\frac{f}{-|a|}) u} du$

$= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{-|a|}\right) \qquad a < 0$

$X_1(f) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{|a|}\right) & a > 0 \\ \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{-|a|}\right) & a < 0 \end{cases}$

$X_1(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$

5) $Z(f) = X(f) Y(f)$

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) e^{j2\pi f t} df$

$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} d\lambda$

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} d\lambda \, e^{j2\pi f t} df$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) y(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} e^{j2\pi f t} df \, d\lambda$

$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi f(t-\lambda)} df \, d\lambda$

$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda$

$= x(t) * y(t)$

Exercice 2.16

Démontrez les propriétés 4 et 6.

2.7.2 Application des propriétés de la transformée de Fourier

La plupart des transformées de Fourier peuvent être trouvées en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier de la section 2.7.1. À partir de (2.69) et des propriétés de la transformée de Fourier, une liste des paires de transformée de Fourier importantes est donnée dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2: Paires de transformée de Fourier importantes

$x(t)$	$X(f)$
$A\delta(t)$	A
A	$A\delta(f)$
$A\Pi(t)$	$A\text{sinc}(f)$
$A\text{sinc}(t)$	$A\Pi(f)$
$A\Lambda(t)$	$A\text{sinc}^2(f)$
$e^{-at}u(t)$, $a > 0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{-a\|t\|}$, $a > 0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$Ae^{j2\pi f_o t}$	$A\delta(f-f_o)$
$A\cos(2\pi f_o t)$	$\frac{A}{2}\delta(f-f_o)+\frac{A}{2}\delta(f+f_o)$
$A\sin(2\pi f_o t)$	$\frac{A}{2j}\delta(f-f_o)-\frac{A}{2j}\delta(f+f_o)$
$A\cos(2\pi f_o t+\phi)$	$\frac{Ae^{j\phi}}{2}\delta(f-f_o)+\frac{Ae^{-j\phi}}{2}\delta(f+f_o)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$

Exemple 2.11

Utilisez les propriétés des transformées de Fourier et les transformées de Fourier de A et $e^{-at}u(t)$ pour trouver les transformées de Fourier de $A\cos(2\pi f_o t)$ et $e^{-a|t|}$ ($a > 0$).

Solution

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{A\cos(2\pi f_o t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2}e^{j2\pi f_o t}+\frac{A}{2}e^{-j2\pi f_o t}\right\}\\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2}e^{j2\pi f_o t}\right\}+\mathcal{F}\left\{\frac{A}{2}e^{-j2\pi f_o t}\right\}\\ &= \frac{A}{2}\delta(f-f_o)+\frac{A}{2}\delta(f+f_o)\end{aligned}$$

(Utilise les propriétés de linéarité et de décalage fréquentiel).

Pour $e^{-a|t|}$, nous pouvons l'exprimer comme $e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$. Donc $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} + \mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\}$. On peut constater que $e^{at}u(-t)$ est $e^{-at}u(t)$ où t est remplacé par $-t$. Donc nous pouvons utiliser la propriété du rééchellement temporel.

$$\mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{a-j2\pi f}$$

Donc $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}$ est donnée par:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{1}{a+j2\pi f} + \frac{1}{a-j2\pi f} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

Exemple 2.12

Si $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$, trouvez $\mathcal{F}\{x(at-b)\}$ ainsi que $\mathcal{F}\{x[a(t-b)]\}$.

Solution

Pour résoudre cet exemple, nous devons utiliser à la fois les propriétés de rééchelonnement temporel et de décalage temporel, mais l'ordre dans lequel nous les appliquons est très important puisqu'il conduit souvent à des erreurs.

$$\mathcal{F}\{x(at-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at-b)e^{-j2\pi ft}dt$$

Soit $u = at-b$. Alors $t = (u + b)/a = (u/a) + (b/a)$ and $dt = du/a$. En supposant que $a > 0$, alors

$$\mathcal{F}\{x(at-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f\left(\left(\frac{u}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)\right)}du/a = e^{-j2\pi fb/a}\left[\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi(\frac{f}{a})u}du\right]$$

où le terme entre crochets est la transformée de Fourier de $x(at)$ lorsque $a > 0$. Alors $\mathcal{F}\{x(at-b)\} = \frac{e^{-j2\pi fb/a}}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$. On peut également démontrer que $\mathcal{F}\{x[a(t-b)]\} = \frac{e^{-j2\pi fb}}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$.
